POLINOMIOS

Definición de Función Polinómica: Es toda función de dominio el conjunto de los números reales, tal que la imagen de cada número real x es:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales y n es natural.

Definición de Polinomio: Es toda expresión de la forma:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales y n es natural.

Observaciones:
_ Se puede decir que el polinomio $P(x)$ es el medio para calcular $f(x)$
_ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ se denominan coeficientes del polinomio, a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente.

Valor numérico de un polinomio:
Llamaremos valor numérico de un polinomio $P(x)$ con respecto a un número real α, al número que se obtiene luego de efectuar las operaciones en $P(x)$ cuando se sustituye la variable x por α. Anotaremos $P(\alpha)$.

Raíz de un polinomio:
Diremos que un número α es raíz de un polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(\alpha) = 0$.

División entera entre polinomios:
Dados los polinomios $A(x)$ y $D(x)$ no nulo, el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$ de la división $A(x)$ por $D(x)$ verifican:
i) $A(x) = D(x).Q(x) + R(x)$ **ii)** $gr[R(x)] < gr[D(x)]$ o $R(x) = 0$ (polinomio nulo).
Al polinomio $A(x)$ le llamaremos dividendo y al polinomio $D(x)$ le llamaremos divisior.
Esquema $\begin{array}{l|l} A(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$

Observaciones:
i) En el caso que $R(x) = 0$ decimos que:
_ $D(x)$divide a $A(x)$
_ $A(x)$ es divisible por $D(x)$
_ La división $A(x)$ por $D(x)$ es exacta.
ii) $gr[A(x)] \geq gr[D(x)] \Rightarrow gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[D(x)]$

División entre $(x - \alpha)$
Sea un polinomio $P(x)$ dividido por $(x - \alpha)$. Es decir $\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha) \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array}$ por definición $gr[R(x)] < gr(x - \alpha) \Rightarrow$ si $R(x)$ no es el polinomio nulo, el grado del resto es cero, por ello simbolizamos el resto con r ($r \in R$).

Observaciones:
i) El grado del polinomio cociente es la diferencia entre los grados de los polinomios dividendo y divisor. Llamando n al grado del polinomio dividendo tenemos que $gr[Q(x)] = n - 1$.
ii) El coeficiente principal de $Q(x)$ es igual al coeficiente principal de $A(x)$ pues surge de dividir este último por 1, ya que, en esta división, 1 es el coeficiente principal del divisor.

Esquema de Ruffini para dividir $P(x)$ de grado n entre $(x - \alpha)$
Ej: Hallemos el cociente y el resto de dividir $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x - 1$ entre $D(x) = x - 3$

α Coeficientes del dividendo $P(x)$

	4	-6	1	-1
3		12	18	57
	4	6	19	56

resto

Coeficientes del cociente $Q(x)$ (grado $n - 1$), es decir $Q(x) = 4x^2 + 6x + 19$

Esquema de Ruffini para dividir $P(x)$ de grado n entre $(ax+b)$

Ej: Hallemos el cociente y el resto de dividir $P(x) = -2x^3 + 8x^2 + 10$ entre $D(x) = 2x - 4$

$\frac{-b}{a}$ Coeficientes del dividendo $P(x)$

	-2	8	0	10
2		-4	8	16
	-2	4	8	26

resto

Coeficientes de $Q'(x)$ (grado $n-1$), siendo el cociente $Q(x) = \frac{Q'(x)}{a}$, es decir $Q(x) = -x + 2x + 4$

Teorema del resto:

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $(x-\alpha)$, es igual al valor numérico de P para $x = \alpha$.

H) $\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha) \\ \hline r & Q(x) \end{array}$ **T)** $P(\alpha) = r$

Demostración: Por hipótesis $P(x) = Q(x)(x-\alpha) + r$, calculemos $P(\alpha) = Q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r \Rightarrow P(\alpha) = Q(\alpha)0 + r$ $\Rightarrow \boxed{P(\alpha) = r}$

Teorema de Descartes:

La condición necesaria y suficiente para que $P(x)$ sea divisible entre $(x-\alpha)$ es que α sea raíz de $P(x)$.

H) $\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha) \\ \hline 0 & Q(x) \end{array}$ **T)** α es raíz de $P(x)$

Demostración: Por ser $P(x)$ divisible entre $(x-\alpha) \Rightarrow r = 0$, por teorema del resto tenemos $\boxed{P(\alpha) = 0}$, es decir α es raíz de $P(x)$.

Teorema de Descomposición Factorial:

Todo polinomio de grado n, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con h raíces reales distintas dos a dos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h (h \le n)$, puede expresarse como $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_h)Q(x)$ siendo $Q(x)$ un polinomio de grado $(n-h)$.

Corolario:

Todo polinomio de grado n con n raíces reales distintas dos a dos, puede expresarse de la forma:

$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$

En particular si $P(x)$ es un polinomio de grado 3, con tres raíces reales distintas, puede expresarse como:

$\boxed{P(x) = a_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}$

Raíces evidentes para un polinomio de tercer grado:

Sea $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dicho polinomio tendrá por raíz:

* $\boxed{x = 0}$ si $P(0) = 0$, es decir $P(0) = a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 \Rightarrow P(0) = a_0$ o sea $\boxed{a_0 = 0}$
Es decir si un polinomio tiene por término independiente 0, admite por raíz $x = 0$.

* $\boxed{x = 1}$ si $P(1) = 0$, es decir $P(1) = a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ o sea $\boxed{a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0}$
Es decir si en un polinomio la suma de sus coeficientes es 0, admite raíz $x = 1$.

* $\boxed{x = -1}$ si $P(-1) = 0$, es decir $P(-1) = a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0$ o sea $-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 + a_0 = a_3 + a_1}$
Es decir si en un polinomio la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar, admite raíz $x = -1$.